

Géométrie dans l'espace

EL KYAL MOHAMED

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

➤ Expressions analytiques :

Soient $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ et $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$ deux vecteurs

• **Produit scalaire :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$

• **Norme :** $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

• **Produit vectoriel :** $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$

➤ Aire d'un triangle :

L'aire d'un triangle ABC est: $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

➤ Distances :

La distance entre deux points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

La distance du point M au plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est:

$$d(M; P) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

La distance du point M à la droite Δ A, \vec{u} est: $d(M, \Delta) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

➤ Equation cartésienne d'un plan :

$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $P \Leftrightarrow P : ax + by + cz + d = 0$

Si $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ alors les points A, B et C ne sont pas alignés

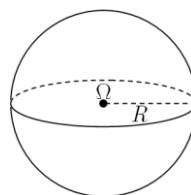
Dans ce cas : $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur normal au plan ABC et l'équation cartésienne du plan ABC peut être déterminé à l'aide de l'équivalence suivante :

$$M \in ABC \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{AB} \wedge \vec{AC} = 0$$

➤ Equation cartésienne d'une sphère:

L'équation cartésienne d'une sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est :

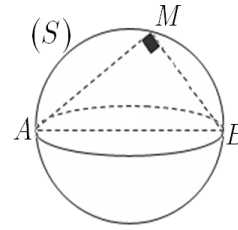
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



- **Ensemble des points M de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$**

L'ensemble des points de l'espace vérifiant :

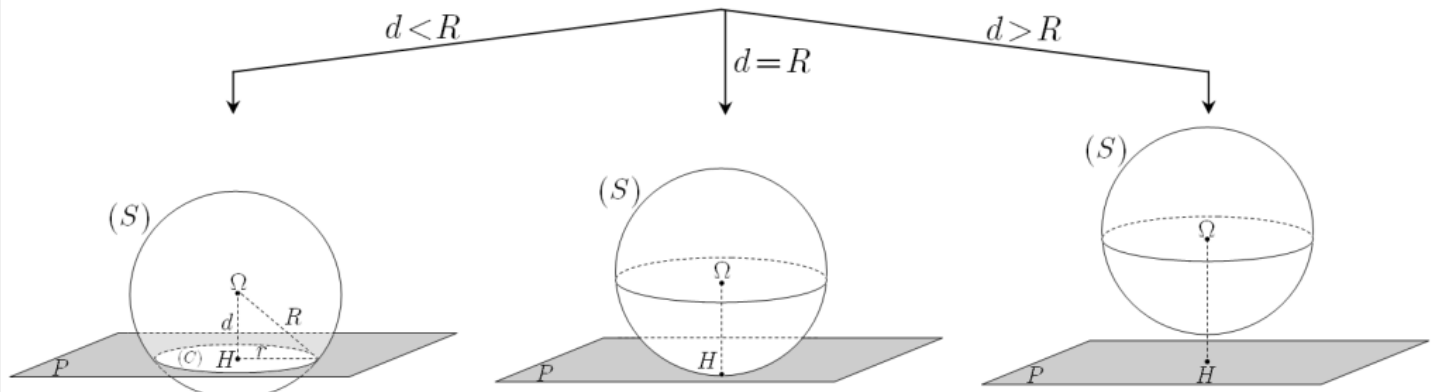
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$



- **Intersection d'une sphère et d'un plan :**

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et le plan P

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur le plan P . On pose : $d = \Omega H = d_{\Omega, P}$



P coupe S selon un cercle C de centre H et de rayon : $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

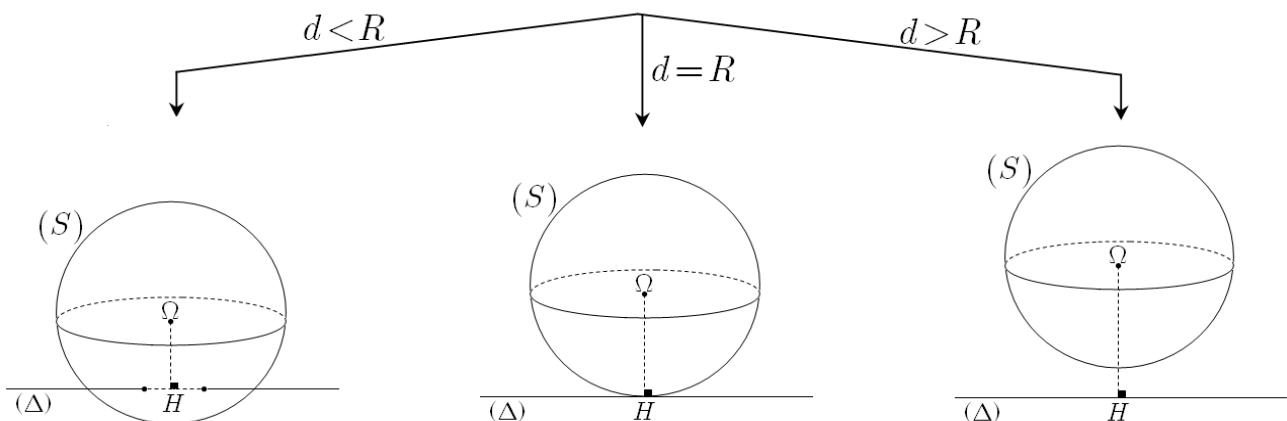
P est tangente à S en H

P ne coupe pas S

- **Intersection d'une sphère et d'une droite :**

Soit la sphère (S) de centre Ω et de rayon R et la droite Δ .

Soit H le projeté orthogonal du centre Ω sur la droite Δ . On pose : $d = \Omega H = d_{\Omega, \Delta}$



Δ coupe S en deux points distincts

Δ est tangente à S en H

Δ ne coupe pas S